

06/12/2016

Μαθημα 179

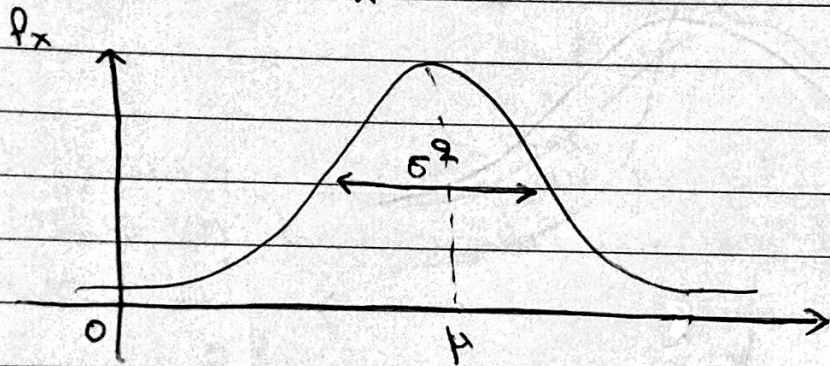
Πιθανότητες

Κανονική Κατανομήτ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

Παραμέτρος Μέσης

Παραμέτρος Διασποράς

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x-\mu)^2}$$

Πρόταση (Αναστροφή $N(\mu, \sigma^2)$)

Αν n τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε n τ.μ. $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
 $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Τυπικός Μετασχηματισμός

Προκείμενα: Αν $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$

Εφαρμογή πρότερου για $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$

Πρόταση: Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και έστω $Z = \frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{X - \mu}{\sigma}$

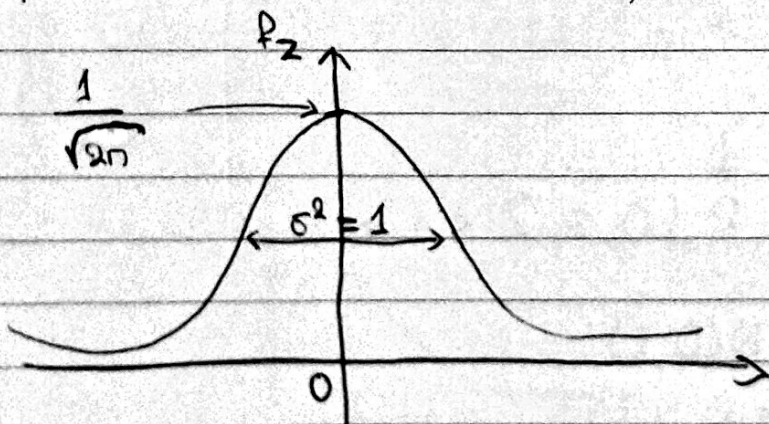
Τότε $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Η $N(0, 1)$ ονομάζεται Γαουσιανή Κανονική Κατανομή

Ορισμός: Η τ.μ. Z λέγεται Γαουσιανή αν οι τιμές της Z , $z \in \mathbb{R}$ και η β.π.π. της Z είναι:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Συμβολισμός: $Z \sim N(0, 1)$



Η α.β.κ. της $N(0, 1)$ δεν είναι διαδεκτή σε κλειστή μορφή.
Η α.β.κ. της $N(0, 1)$ είναι:

$$\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2} dt, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Δεν υπολογίζεται.

Από το α.β.κ. ① δώ ειναι διαδεχίτο σε κλειστή μορφή δώ
μπορώ να υπολογίσω πιθανότητες, άρα :

$$P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Ερωτήματα: Πως υπολογίζω πιθανότητες για $Z \sim N(0,1)$;
↳ πιθανος τυπικης κανονικης κατανομης
(στο τέλος του βιβλίου)

Χρήση Πινάκων $N(0,1)$

Δίνω πιθανότητα της μορφής : $P(0 \leq Z \leq z)$

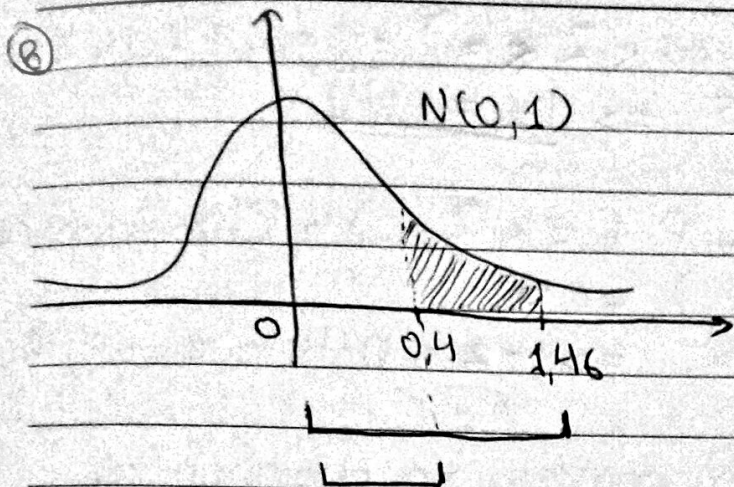
$z = \chi_{\text{υποβρεθό}}$, $Z \sim N(0,1)$

Ιδιότητες $N(0,1)$

- ① Συμμετρία
- ② $P(-\infty < Z < +\infty) = 1$
- ③ $P(-\infty < Z \leq 0) = P(0 \leq Z < +\infty) = 0,5$

Παραδείγματα: Αν $Z \sim N(0,1)$

- α) $P(0 < Z \leq 0,75) = 0,2734$
- β) $P(0,4 \leq Z < 1,46)$
- γ) $P(-0,7 < Z < -0,25)$
- δ) $P(-1,24 < Z \leq 0,36)$
- ε) $P(Z > 1,12)$
- στ) $P(Z < -0,98)$



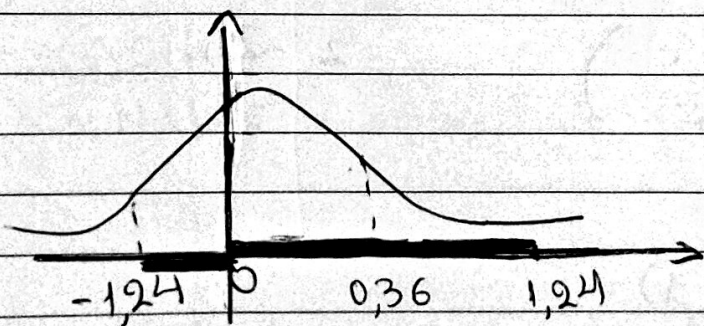
$$P(0,4 \leq Z \leq 1,46) = P(0 \leq Z \leq 1,46) - P(0 \leq Z \leq 0,4) = 0,4279 - 0,1554 = 0,2725$$

⑨

$$P(-0,7 < Z < 0,25) = P(0,25 < Z < 0,7) = P(0 < Z < 0,7) - P(0 < Z < 0,25) = 0,2580 - 0,0987$$

⑩

$$P(-1,24 < Z < 0,36) = P(0 < Z < 0,36) + P(0 < Z < 1,24) = 0,1406 + 0,3995$$



Αντίστροφη χρήση πίνακα $N(0,1)$

Γνωρίζω πιθανότητα και αναζητώ το αντίστοιχο z στο οποίο αντιστοιχεί

Παράδειγμα

Αν $Z \sim N(0,1)$ να βρεθεί $z \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

(α) $P(Z \leq z) = 0,95$

(β) $P(Z \geq z) = 0,6772$

$$\textcircled{a} \quad 0,95 = P(Z \leq z) = P(-\infty < Z \leq z) = 0,5 + P(0 < Z \leq z)$$

$$\Rightarrow P(0 < Z \leq z) = 0,45 \Rightarrow \boxed{z = 1,64}$$

$$\textcircled{b} \quad 0,6772 = P(Z > z) = P(z < Z < 0) + P(0 < Z < +\infty)$$

$$= P(0 < Z < -z) + 0,5$$

$$\Rightarrow P(0 < Z < -z) = 0,1772 \Rightarrow -z = 0,46 \Rightarrow z = -0,46$$

Ερωτήματα: Πως ορίζουμε πιθανότητες για οποιαδήποτε κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$;

Απάντηση: Χρησιμοποιούμε τον τυπικό μετασχηματισμό $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ και η απάντηση φέρνουμε πιθανότητες

δίνεται: $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) =$

a, b γνωστά

$$= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right), \quad Z \sim N(0,1)$$

Παράδειγμα

Επίδομα $\equiv X \sim N(5,1)$

$\textcircled{a} \quad P(4 < X < 6)$, $\textcircled{b} \quad P(X > 6 | X > 5)$

\textcircled{c} Ποια τουλάχιστον επίδομα περιμένουμε να λάβει με πιθανότητα 0,99

$$\textcircled{a} \quad P(4 < X < 6) = P\left(\frac{4-5}{1} < \overset{Z}{\frac{X-5}{1}} < \frac{6-5}{1}\right) =$$

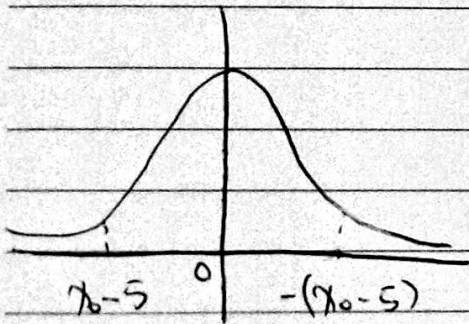
$$= P(-1 < Z < 1) = 2 \cdot P(0 < Z < 1) = 2 \cdot 0,2413 = \dots$$

$$\textcircled{6} P(X > 6 | X > 5) = \frac{P(X > 6 \text{ και } X > 5)}{P(X > 5)} = \frac{P(X > 6)}{P(X > 5)}$$

$\textcircled{7}$ Έστω x_0 η επίδοσή σου πάνω από αυτή η πιθανότητα είναι 0,9. Ζητάει x_0 τέτοιο ώστε $0,9 = P(X > x_0)$

$$0,9 = P(X > x_0) = P\left(\frac{x-5}{1} > \frac{x_0-5}{1}\right) = P(Z > (x_0-5)) \textcircled{*}, Z \sim N(0,1)$$

$$\boxed{x_0 - 5 < 0}$$

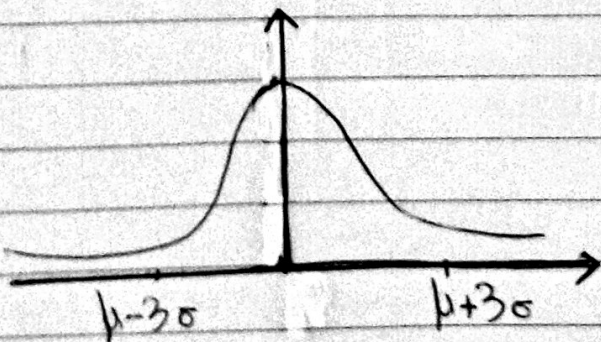


$$\begin{aligned} \textcircled{*} &= P(Z < -(x_0-5)) = \\ &= 0,5 + P(0 < Z < -(x_0-5)) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(0 < Z < -(x_0-5)) &= 0,4 \Rightarrow \\ \Rightarrow -(x_0-5) &= 1,28 \Rightarrow \boxed{x_0 = 3,72} \end{aligned}$$

\uparrow
πίθανο

Παρατήρηση

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,9974$



ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ
 (Δίνει πιθανότητες της μορφής: $P(0 \leq Z \leq z)$, $Z \sim N(0,1)$)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990